

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系

一、一元二次方程的判别式

一元二次方程
判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$
(a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$),
由配方法可得_____

当 $\Delta =$ _____, 方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____, 方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____, 方程_____实数根

🍌 举个“栗”子

栗子1

1. 一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的解得情况是() .

- A. 有两个不相等的实数根
- B. 有两个相等的实数根
- C. 没有实数根
- D. 无法确定

栗子2

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____ .

3. 若关于 x 的方程 $kx^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0$ 有实数根, 则实数 k 的取值范围是() .

- A. $k = 0$
- B. $k \geq -1$ 且 $k \neq 0$
- C. $k \geq -1$
- D. $k > -1$

4. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x - 1 = 0$ 没有实数根, 那么 k 的取值范围是_____ .

5. 已知 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + a = 0$ 是两个关于 x 的一元二次方程, 下列判断不正确的是() .

- A. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根, 那么方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 也有两个实数根
- B. 如果 m 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根, 那么 $\frac{1}{m}$ 是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的一个根
- C. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等, 那么这个根是1
- D. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等, 那么这个根是1或-1

栗子3

6. 已知，关于 x 的方程 $2x^2 - mx + n = 0$.
- (1) 当 $m - n = 4$ 时，判断方程根的情况 .
 - (2) 若方程有两个相等的实数根，当 $n = 2$ 时，求此时方程的根 .

7. 已知，关于 x 的方程 $(m - 1)x^2 - (m - 2)x + \frac{1}{4}m = 0$.
- (1) 当 m 取何值时方程有一个实数根？
 - (2) 当 m 取何值时方程有两个实数根？

栗子4

8. 已知整数 $k < 5$ ，若 $\triangle ABC$ 的边长均满足关于 x 的方程 $x^2 - 3\sqrt{k}x + 8 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长是 _____ .

独步天下1

9. 已知：关于 x 的方程 $kx^2 - (4k + 1)x + 3k + 3 = 0$.
- (1) 请说明：此方程必有实数根 .
 - (2) 若 k 为整数，且该方程的根都是整数，直接写出 k 的值 .

二、一元二次方程的根系关系

探究：

从因式分解法可知，方程 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (x_1, x_2 为已知数) 的两根为 x_1 和 x_2 ，将方程化为一般式后，你能说一说两个根和系数之间的关系吗？

上述探究针对于二次项系数为1的一元二次方程，现在我们拓展到一般式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 中继续进行探究：

当 $\Delta \geq 0$ ，即方程有实数根，由_____可知，

$x_1 + x_2 =$ _____，

$x_1 x_2 =$ _____。

！总结：

因此，方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a, b, c 有如下关系：

_____。

 举个“栗子”

 栗子5

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 。

(1) 求 m 的取值范围。

(2) 若 $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 10 = 0$ ，求 m 的值。

 栗子6

11. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别为 $x_1 = 3, x_2 = 1$ ，那么这个一元二次方程是 ()。

A. $x^2 + 3x + 4 = 0$ B. $x^2 + 4x - 3 = 0$ C. $x^2 - 4x + 3 = 0$ D. $x^2 + 3x - 4 = 0$

12. 已知 $x_1 = 3$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 的一个根，则方程的另一个根 x_2 是_____。

13. 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是0, 则 a 的值为().
- A. 1 B. -1 C. 1或-1 D. $\frac{1}{2}$

栗子7

14. 已知 m, n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 - mn + 3m + n = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两根, 则 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值为().
- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2

栗子8

16. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 7$, 则 $(x_1 - x_2)^2$ 的值是().
- A. 1 B. 12 C. 9 D. 25
17. 已知 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的两实数根, 求下列各式的值:
- (1) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.
- (2) $(x_1 - x_2)^2$.
- (3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2 = 0$.
- (1) 若方程有实数根, 求实数 m 的取值范围.
- (2) 若方程两实数根分别为 x_1, x_2 , 且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1x_2|$, 求实数 m 的值.

栗子9

19. 若实数 $a \neq b$, 且 a, b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$, 则代数式 $\frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1}$ 的值为 () .

A. -20

B. 2

C. 2或-20

D. 2或20

20. 若 $ab \neq 1$, 且有 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 及 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 _____ .

栗子10

21. 设 $x^2 - px + q = 0$ 的两实数根为 α, β , 那么 α^2, β^2 为两根的一元二次方程是 _____ .

独步天下2

22. 已知 x, y 均为实数 , 且满足 $xy + x + y = 17$, $x^2y + xy^2 = 66$. 求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ 的值 .